- Különböző testek forgatónyomatéka adott forgástengely esetén:

Test	forgástengely	Θ
Tömegpont	r távolságra	mr^2
Két tömegpont	középen	$md^2/2$
Két tömegpont	az egyik ponton át	md^2
Üreges henger	szimmetriatengely	mr^2
Tömör henger	szimmetriatengely	$mr^2/2$
Rúd	középen	$ml^2/12$
Rúd	az egyik végén	$md^2/3$
Tömör gömb	szimmetriatengely	$2/5md^2$
Tömör gömb	érintő	$7/5mr^2$
Gömbhéj	szimmetriatengely	$2/3\ md^2$
Négyzet	középen	$ma^2/12$
Négyzet	szélén	$ma^2/3$

- A mozgásegyenlet levezetése a következő lesz (tömegpont r távolságban való keringésére levezetve):

$$M = Fr = mar = mr\frac{\Delta v}{\Delta t} = mr^2 r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = mr^2\beta = \Theta\beta \tag{50}$$

- Forgó mozgás esetén Newton II. törvénye tehát így értelmezhető általánosságban:

$$M = \Theta\beta \tag{51}$$

- Definiáljuk a perdületet ez alapján, mivel $\beta = \Delta\omega/\Delta t$, azaz

$$M = \Theta\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Theta\omega)}{\Delta t} = \frac{\Delta J}{\Delta t} \text{ azaz legyen } J = \Theta\omega. \tag{52}$$

- Tömegpontra a perdület tehát $J = \Theta\omega = mr^2v/r = mvr = Ir$.
- Ha a forgatónyomaték nulla, a perdület nem változik, mivel $\Delta J = M\Delta t$.
- Centrális erő esetén a középpontra nézve nincs forgatónyomaték $\Rightarrow$ perdület állandó! Mivel a perdület $r \times v$-vel arányos, ezért ebből éppen Kepler II. törvénye következik.
- Forgatónyomaték híján $J = \Theta\omega =$ állandó, a perdület nem változik. A perdület vektormennyiség, ω irányába mutat, és ha állandó, a nagysága és az iránya sem változik!
- Piruettező korcsolyázóra is ugyanez igaz (behúzza a kezét, ezzel csökken a tehetetlenségi nyomatéka, azaz a perdület állandósága miatt nő a szögsebessége – gyorsul a pörgése).
- Megpörgetett búgócsiga (vagy tengelyére állított biciklikerék, ahogy az órai kísérletben) sokáig nem dől el, mivel a perdület állandósága miatt nem változik a forgástengely iránya sem. Mivel azonban alátámasztási pont nem pontszerű, a tengelynek van kiterjedése, tehát az itt ható súrlódásnak van forgatónyomatéka, még ha nagyon kicsi is. Ezért előbb-utóbb mégis eldől a forgó kerék, ahogy lelassul.
- Föld mozgása a pörgettyűmozgás bonyolult alkalmazása, a Nap és a Hold forgatónyomatéka miatt (mivel a Föld nem pontosan gömb alakú, ezért hathat rá forgatónyomaték) jön létre.
- Precesszió: konstans (gravitációs) erő hat egy döntött pörgettyűre. Ennek forgatónyomatéka az erő és a tengely síkjára merőleges (vektoriális szorzás alapján). Ez tehát ilyen irányban változtatja a perdületet, amely amúgy a tengely irányába mutat. A perdület, és így a tengely is, egy függőleges tengely körül forog majd.
- A Föld forgását és keringését az alábbi ciklikus változásokkal lehet leírni:
  - 26 000 éves ciklusban precesszál a Föld forgástengelye (a csillagokhoz képest)
  - 41 000 éves ciklusban változik a forgástengely és a pálya szöge, 22,1 és 24,5 fok között, most 23,4 fok. Az előzővel együtt ez adja a napév (azaz két tavaszi napéjegyenlőség közötti időtartam) változásait.
  - 112 000 éves ciklusban forog a pálya-ellipszis
  - 100 000 éves ciklusban változik az ekcentricitás (0-5% között)
  - Évente 0,02 másodperccel nő az év hossza az ár-apály mozgás miatt.
  - Valójában a Föld mozgása *kaotikus*: ha van néhány méter pontatlanság a mostani pozíció mérésében, akkor lehetetlen megmondani, hogy 100 millió év múlva hol lesz a bolygó. Ez több testből álló rendszerek esetében általában így van.

- Jégkorszakok és egyéb éghajlati jelenségek oka. Most a nyár van naptávolban (amikor gyorsan mozog a Föld), ezért hidegebb a nyár és melegebb a tél. Kb 10.000 év múlva éppen fordítva lesz: melegebb nyár és hidegebb tél várható.

7.6. Forgó és haladó mozgások összehasonlítása

- Mennyiség-párok:

$$\begin{array}{ccc} m & \Leftrightarrow & \Theta \\ s & \Leftrightarrow & \alpha \\ v & \Leftrightarrow & \omega \\ a & \Leftrightarrow & \beta \\ F & \Leftrightarrow & M \\ I & \Leftrightarrow & J \end{array}$$

- Törvény-párok:

$$F = ma \qquad M = \Theta\beta \tag{53}$$
$$I = mv \qquad J = \Theta\omega \tag{54}$$
$$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} \qquad E_{\text{kin}} = \frac{\Theta\omega^2}{2} \tag{55}$$
$$s = v_0t + \frac{at^2}{2} \qquad \alpha = \omega_0t + \frac{\beta t^2}{2} \tag{56}$$
$$v = v_0 + at \qquad \omega = \omega_0 + \beta t \tag{57}$$

- Megmaradás a perdület és lendület (külső erő ill. forgatónyomaték híján). Konzervatív rendszerben energia is.

8. Folyadékok mechanikája

7.

8.1. Alapvető fogalmak, mennyiségek

- Nem merev testek, részecskék egymáshoz képest mozognak
- Dinamika és sztatika is, folyadékok és gázok is
- Fontos jellemzőjük a sűrűség, a térfogategységre jutó tömeg (régen: fajsúly, gravitációs erő tömeg helyett):

$$\rho = m/V \text{ , azaz } m = \rho V \tag{58}$$

- Szilárd anyagokra néhány 1000 kg/m^3, folyadékokra 1000 kg/m^3, gázokra 1 kg/m^3
- Nyomás: felületre jutó erő, mértékegysége N/m^2=Pa. 1 atm = 1,013 bar = 101300 Pa:

$$p = \frac{F}{A} \tag{59}$$

- Nyomást létrehozó erő sztatika esetén merőleges a felületre, egyébként mozgást hozna létre.
- Hóban, ingoványban el nem süllyedés: adott nyomást bír ki; nagy felületen ugyanakkora súly kisebb nyomást eredményez
- Gáz esetén: növekvő nyomásra csökken a térfogat. Ideális folyadék esetén: a térfogat állandó (azaz a vizet nem tudjuk összenyomni).

8.2. A hidrosztatika törvényei

- Folyadékoszlop nyomása (h magasság, A felület esetén):

$$m = \rho V = \rho hA \text{ , ezért } p = \rho gh. \tag{60}$$

- Ez a hidrosztatikai nyomás törvénye, nem csak oszlopra igaz, bármilyen alakú edényben is ekkora alul a nyomás.
- Közlekedőedények: bármilyen nyitott végű ágban ugyanolyan magasra megy fel a folyadék.
- Nyomáskülönbség mérés folyadékszint-különbséggel lehetséges.
- Toricelli cső: a légnyomás 760 mm higannyal tart egyensúlyt (ha a higany felett vákuum van). 1 Hgmm = 133,4 Pa.
- Pascal-törvény: nyugvó folyadékban a nyomás gyengítetlenül továbbterjed minden irányban.
- A nyomás h mélységben bármilyen irányú felületre nézve $\rho g h$!
- Hidraulikus emelő: nagy felületen kis erő = kis felületen nagy erő (nyomás ugyanis állandó)
- Archimédesz (Kr.e. 200): felhajtóerő

$$F_{fel} = \rho g V \tag{61}$$

- h mélységben lévő, a magasságú, A felületű téglatestre belátható: a tetejére $p = \rho g h$ nyomás hat, az aljára pedig $p' = \rho g(h + a)$. A nyomáskülönbség $\rho g a$, ebből az erő $\rho g a A = \rho g V$.
- A felhajtóerő éppen a kiszorított víz súlyával egyezik meg.
- A testre ható gravitációs erő $mg = \rho_{test} V g$, míg a felhajtóerő $\rho_{folyadék} V g$. Összesen:

$$\Sigma F = (\rho_{folyadék} - \rho_{test}) g V \tag{62}$$

- Süllyedés, ha $\rho_{folyadék} < \rho_{test}$ (fémtömb vízben, labda levegőben)
- Emelkedés, ha $\rho_{folyadék} > \rho_{test}$ (labda, hajó vízben, héliumos lufi levegőben)
- Egyenlőség esetén „lebegés": légballon levegőben, itt a sűrűséget állítják a forró levegővel.

8.3. Folyadékok áramlása

- Stacionárius áramlásokat tárgyaljuk (az áramlás állandósult).
- Lehet turbulens: örvények keletkezése. Lamináris: sebességek kb párhuzamosak. Áramvonal vagy trajektória: egy részecske pályája. Ezzel vizualizáljuk az áramlást.
- Fontos, hogy összenyomható vagy összenyomhatatlan, azaz a sűrűség változik-e a hellyel és az idővel. Az ideális folyadékok (jó közelítéssel a víz) összenyomhatatlanok.
- Anyagmegmaradásból következik a *kontinuitási törvény*.
  - A_1 keresztmetszetű csőben v_1 sebességgel áramlik a közeg, itt ρ_1 a sűrűség. Később a cső leszűkül A_2 felületre, ekkor a sebesség v_2, a sűrűség ρ_2. Mivel az A_1 és az A_2 felület közötti anyag nem veszhet el, amennyi bejön az egyik oldalon, annyi kimegy a másikon. Innen, a $v = \Delta x / \Delta t$ sebességet használva:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \tag{63}$$
$$\rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2 \tag{64}$$
$$\rho_1 A_1 \Delta x_1 = A_2 \rho_2 \Delta x_2 \tag{65}$$
$$\rho_1 A_1 v_1 = A_2 \rho_2 v_2 \tag{66}$$

  - Összenyomhatatlan folyadék esetén:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{67}$$

  - Itt tehát ha nagyobb a keresztmetszet, kisebb a sebesség. Autópályán, dugóban, szűkületkor megnő a sebesség, illetve locsolócsőben is, a szűk nyíláson gyorsan áramlik ki a víz.
- Az energia is állandó egy adott térfogatban, illetve két szélén végzett munka változtatja meg:

  - Bejön a Δm tömegű, v sebességű anyag, a p nyomás pedig a felületen munkát végez:

$$\Delta E + W = \text{állandó} \tag{68}$$
$$\frac{1}{2}\Delta m v^2 + F\Delta x = \text{állandó} \tag{69}$$
$$\frac{1}{2}\Delta m v^2 + F v \Delta t = \text{állandó} \tag{70}$$
$$\frac{1}{2}\rho A \Delta x v^2 + A p v \Delta t = \text{állandó} \tag{71}$$
$$\frac{1}{2}\rho A v \Delta t v^2 + A p v \Delta t = \text{állandó} \tag{72}$$
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{állandó} \tag{73}$$

  - Ez a Bernoulli törvény $p + \rho v^2/2 =$ állandó, tehát ha a sebesség nagy, lecsökken a nyomás.
  - Repülőgép felhajtóereje és autó leszorítóereje: az egyik oldalon nagyobb az áramlási sebesség, ezért itt kisebb lesz a nyomás: ez a nyomáskülönbség húzza felfelé a repülőt és szorítja az aszfalthoz a versenyautót.
  - Vitorlás: széllel párhuzamos vitorla szárnyként viselkedik, húzza a hajót a kívánt irányba. Szélre merőleges vitorla csak kisebb sebességet engedne meg (a szél hozzáu képesti sebessége lecsökken, ha együtt mozgunk vele), ezért nem feltétlenül jó hátszéllel vitorlázni.
  - Megcsavart (forgó) labda, érrendszeri jelenségek.
- Lamináris áramlások esetén folyadékokban *nyíró erők* jelennek meg, lassítják az áramlást.
  - Víz mederben való áramlása esetén, a parton nulla a sebesség, Δy távolságra a parttól már Δv.
  - A visszatartó erő ezzel a sebességkülönbséggel arányos, illetve az áramlás A keresztmetszetével:

$$F_x = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta y} \tag{74}$$

  - Itt η a viszkozitás mértéke, Pa·s.
  - Viszkozitás a folyás tökéletességét jellemzi, a folyást gátló nyíró erők hatását. Tökéletes folyadék: szuperfolyékony hélium és a Világegyetem az Ősrobbanás után. Nem tökéletes: víz; még kevésbé: méz; legkevésbé: aszfalt, üveg
  - Víz: 0,01 Pas, méz: 3 Pas, gázok: 0,0001 Pas, vér: 0,04 Pas
  - Poiseuille törvény: Δp nyomáskülönbség hatására Q víz folyik át a csövön (m^3/s). Ha R a cső sugara és L a hossza, és η a viszkozitás:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta p. \tag{75}$$

  - Tehát kétszer akkora nyomás kétszer annyi anyagot nyom át, de kétszer akkora viszkozitású folyadék esetén csak feleannyi anyag áramlik át.
  - Stokes törvény: az R sugarú golyóra ható közegellenállási erő η viszkozitású folyadékban:

$$F = -6\pi\eta R v \tag{76}$$

  - Ez tulajdonképpen a korábban említett $F = -\alpha v$ közegellenállási erő precízebben.
- Turbulens áramlásokok jellemzésekor hasznos a dimenziótlan Reynolds-szám:

$$Re = \frac{\rho r v}{\eta}. \tag{77}$$

- Csőben, ha $Re > 1160$: turbulens áramlás, ha < 1160, akkor lamináris áramlás lesz.
- Turbulens áramlások esetén fellépnek örvények, forgószelek. Ezek felváltva érkezve alakítanak ki egyfajta áramlási profilt: ez lobogtatja a zászlót, de hidak, épületek esetében rezonanciakatasztrófa következhet be.

9. Hullámmozgás és a hullámegyenlet

8.

9.1. A hullámmozgás matematikai alapjai

- A sugárzás nem más, mint hullámterjedés.
- Az alap-jelenség egy térben értelmezett függvény, $f(x)$. Itt x a tér-koordináta, f pedig egy térfüggő mennyiség:
  - egy húr kitérése (vonós hangszeren),
  - egy folyadék szintjének értéke (víz felszínének alakja),
  - az autók sűrűsége az autópályán,
  - egy rugó spiráljainak sűrűsége,
- Ez a függvény minden t időpillanatban más, azaz $f_t(x)$-nek írhatjuk.
- A legegyszerűbb eset a haladó hullám: $f_t(x) = f_{t+\Delta t}(x - \Delta x)$.
- Mostantól $f_t(x) = f(t, x)$. A fenti egyenlőség így tehát:

$$f(t + \Delta t, x) = f(t, x - \Delta x) \tag{78}$$

- Szavakkal (az autópályás esetre): az autók sűrűsége (f) ugyanakkora lesz itt (x) egy perc múlva ($t + \Delta t$), mint most (t) egy kilométerrel hátrébb ($x - \Delta x$).
- A hullámterjedés alapja tehát a (78) egyenlet.
- Ezt teljesíti bármely $f(x + ct)$ függvény, hiszen behelyettesítve:

$$f(x + c(t + \Delta t)) = f(x + \Delta x - ct), \text{ ez biztosan teljesül, ha} \tag{79}$$
$$x + c(t + \Delta t) = x + \Delta x - ct, \text{ azaz} \tag{80}$$
$$c\Delta t = \Delta x, \text{ azaz} \tag{81}$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c \tag{82}$$

azaz c a hullám „terjedési sebessége".
- Összefoglalva: adott függvényalak, $t = 0$ esetén $f(x)$, későbbi időpontokban $f(x + ct)$.

9.2. Periodikus hullámok

- Klasszikus hullám-alak: periodikus térben a $t = 0$ időpillanatban is, azaz $f(x + n\lambda) = f(x)$ minden x-re, n egész számra. Ekkor λ a hullámhossz.
- Ekkor időben is lesz egy peridocitás (ennek reciproka a frekvencia), hiszen az (79) egyenlet szerint (ha $\Delta x = \lambda$, és $\Delta t = T$):

$$f(x + \lambda + ct) = f(x - c(t + T)), \text{ azaz} \tag{83}$$
$$f(x + ct) = f(x + c(t + T)). \tag{84}$$

- Tehát ha térben λ periodicitással (hullámhosszal) rendelkezik a hullám, akkor időben $T = \lambda/c$ periódusideje lesz, és $\nu = 1/T = c/\lambda$ frekvenciája.
- Ekkor $f(x+ct)$ helyett $f(kx+kct)$-t írunk, és definiáljuk az $\omega = kc$ mennyiséget. A hullámunk tehát $f(kx + \omega t)$ lesz.
- Fontos látni, hogy a $t = 0$ időpillanat kiválasztása tetszőleges, ezért általánosságban $f(kx + \omega t + \phi)$ függést írunk, ahol ϕ egyfajta fázis-eltolás.
- A hullámtan alapvető egyenletei tehát: hullámok nòme

$$k = \omega/c \tag{85}$$
$$\lambda = Tc \tag{86}$$

- Klasszikus hullámalak: szinuszhullám. Azaz $f(x, t) = A\sin(kx+\omega t+\phi)$. A $\sin(x)$ hullámhossza $\lambda = 2\pi$, a $\sin(kx)$ hullámhossza pedig $\lambda = 2\pi/k$. Ekkor $T = 2\pi/\omega$.

9.3. A Fourier-tétel

- Miért beszélhetünk szinuszhullámokról általános esetben is?
- Joseph Fourier: periodikus függvények felírhatóak sok szinusz és koszinusz függvény összegeként! Ezek a Fourier-komponensek
- Fourier-dekompozíció: a Fourier-komponensek amplitúdója frekvencia szerint nézve. Ilyen a zenelejátszók kijelzője szokszor: mutatja az alacsony, közepesen alacsony, közepes, közepesen magas, magas hangok részarányát, azaz az ezeknek megfelelő Fourier-komponensek amplitúdójat.
- Így bármely függvényt felbonthatunk szinusz-komponensekre, és az általánosság megtartásával beszélhetünk mindig csak szinusz-függvényekről!
- Nincs periodicitás $\Rightarrow$ Fourier-transzformáció (nem számozható Fourier-komponensek, hanem új függvény).

9.4. Térbeli hullámok

- A legegyszerűbb esetet tárgyaltuk eddig, ahol egy térdimenzió van (azaz egy térkoordináta, x), és a kitérés is skalármennyiség.
- Bonyolítsuk a helyzetet azzal, hogy helyezzük az egészet egy háromdimenziós térbe, ahol a koordináták x, y és z
- Ekkor legyen a függvényünk $f(x, y, z, t) = A\sin(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t)$. Itt $t = 0$ esetén konstans f, ha $k_x x + k_y y + k_z z$ =const.
- Ez a k vektorra merőleges feülületeket jelöl ki, ezért ezt *síkhullámnak* hívjuk.
- A terjedési sebesség ugyanúgy számítható, csak most vektoriálisan: $k = \omega c/|c|^2$.
- Ekkor kijelöljetjük az új koordináta-rendszert a következőképpen: legyen az x' irány k iránya, ekkor ebben az új rendszerben $k = (k_{x'}, 0, 0)$
- Tehát a síkhullámok egydimenziós hullámként is értelmezhetőek.
- Térbeli hullámok esetén a hullám a középponttól (a forrástól) vett r távolságtól függ, ekkor $f(r, t) = A\sin(kr + \omega t)$

9.5. A hullámegyenlet

9.

- Egyszerű fizikai rendszerek alapegyenletéiből a hullámegyenlet adódik, ahogy alább láthatjuk. Példák:
  - Rugóval összekötött testek lánca
  - Rugóval összekötött ingák (rugóra merőleges lengés).
  - Torziós szálra rögzített vízszintes „súlyzók"
- Vegyük azt a példát, ahol egy egyenes mentén sok test van láncba szervezve rugókkal.
  - Bevezetjük $f(x, t)$ mennyiséget, ez az eredetileg adott x helyen lévő test kitérése adott időpontban.
  - Ekkor az adott testre ható erő a szomszédokhoz képest mért elmozdulástól függ. Tehát egyrészt Newton II. szerint, mivel a gyorsulás a hely, azaz az $f(x, t)$ kitérés idő szerinti második deriváltja:

$$F = ma = m\frac{d^2 f(x, t)}{dt^2} = m\ddot{f}(x, t) \tag{87}$$

  - Másrészt a rugóerő is kiszámítható, ez az eredetileg x helyen lévő test melletti két rugó megnyúlása, azaz az $x + \Delta x$ és az $x - \Delta x$ helyen lévő testek relatív elmozdulásból adódik, a D rugóállandóval:

$$F = -D(f(x, t) - f(x + \Delta x, t)) - D(f(x, t) - f(x - \Delta x, t))) \tag{88}$$

  - Itt éppen a hely szerinti derivált tűnik fel, mivel

$$f'(x, t) = \frac{df(x, t)}{dx} \simeq \frac{f(x, t) - f(x - \Delta x, t)}{\Delta t} \tag{89}$$

– A második derivált pedig:

$$f''(x,t) = \frac{d^2 f(x,t)}{dx^2} \simeq \frac{f'(x,t) - f'(x-\Delta x, t)}{\Delta t} \tag{90}$$

– Az előző, (88) egyenlettel összevetve tehát

$$m\ddot{f}(x,t) = D\Delta x^2 f''(x,t) \tag{91}$$

– Ez alapján a második térbeli és időbeli derivált megegyezik egy konstans erejéig, és $c = \sqrt{D/m\Delta x}$.

- A hullámegyenlet tehát:

$$\ddot{f}(x,t) = c^2 f''(x,t) \tag{92}$$

- Itt c a rendszer fizikai jellemzőitől függ (rugóállandó, tömegek, kezdeti távolságok), és ez lesz a hullám terjedési sebessége.
- Hasonlóan adódik folytonos közegekre, ha f a közeg sűrűsége.
- A hullámegyenlet általános megoldása: $f(x,t) = f(x+ct)$, ahol f tetszőleges függvény.
- Ez a korábbi alfejezetek alapján c sebességgel haladó hullámot ír le.
- Ha van periodicitás ⇒ Fourier-tétel érvényes ⇒ szinuszfüggvények összegeként értelmezhető a Fourier tétel miatt.

9.6. Hullámok terjedése

- A hullámok felületeken visszaverődnek, elnyelődnek és meg is törhetnek.
- Hullámok találkozásakor interferencia lép fel: erősítés és gyengítés
- Törés: alapja a Huygens-Fresnel elv (a hullámfelület minden pontja elemi hullámok kiindulópontja).
- A terjedési sebesség változása miatt elhajlik a hullámfront.
- Délibábhoz hasonlóan felfelé növekedő hőmérséklet esetén messzebbre hallatszik a hang, és fordítva.
- Nem nagyon magas hanghoz képest a természetes akadályok mérete elég nagy, így könnyen jelentkezik elhajlás.
- Elnyelés: exponenciálisan csökkenő intenzitás (belső súrlódás, hővezetés; ultrahangoknál molekulán belüli rezgések).
- Doppler-hatás:
  – Forrás frekvenciája f, hozzá tartozó periódusidő T és a hullámhossz λ, a terjedési sebesség c.
  – v sebességgel közeledő forrás esetén az első hullámfronthoz képest a második közelebbről indul, így a köztük lévő távolság, azaz az álló megfigyelő szerinti hullámhossz $\lambda' = \lambda - Tv$. Ezek alapján $T' = T(1 - v/c)$.
  – Távolodó megfigyelő esetén $T' = T(1 + v/c)$, tehát összességében az észlelt frekvencia (+: távolodás)

$$f' = f\frac{1}{1 \mp v/c} \tag{93}$$

  – Ha a megfigyelő közeledik a forráshoz, és a forrás áll, akkor az első hullámfront után a másodikkal hamarabb találkozik, hiszen mozgása miatt „elébe megy". A találkozás ideje az elsőhöz képest (ez tulajdonképpen az észlet periódusidő): $T' = \lambda/(v+c)$, ami másképpen $T' = T/(1 + v/c)$. Távolodó megfigyelő esetén negatív előjel lesz, tehát összességében (itt is a felső jel vonatkozik a közeledésre):

$$f' = f(1 \pm v/c) \tag{94}$$

  – A két jelenség összevonva (ha v_m a megfigyelő, v_f a forrás közeghez képesti sebessége, és a fölső műveleti jel vonatkozik a közeledésre):

$$f' = \frac{1 \pm v_m/c}{1 \mp v_f/c} f \tag{95}$$

  – Doppler hatás szerint a távolodó sziréna frekvenciája csökken, tehát mélyebb lesz a hangja. A közeledő forrás hangja magasabbnak hallatszik.
  – Ez fényhullámokra is igaz: a távolodó csillagok fénye vörösebb (ez tartozik az alacsonyabb frekvenciához): ez a vöröseltolódás. Kiemelten fontos: ez alapján sejtették meg, hogy az Univerzum egyfajta robbanásban keletkezett, hiszen minden galaxis távolodik, minél messzebb van, annál gyorsabban. Ez azzal magyarázható, hogy azért van tőlünk távol, mert nagy volt eleve a sebessége: ez a szokásos tapasztalat robbanásokban.

10. Mechanikai hullámok

10.

10.1. Hullámtípusok, terjedési sebesség

- Mechanikai hullámokban valamely mozgás jelenti a hullámot, a részecskék kitérése. Itt tehát az általános $f(x,t)$ függvény valamilyen elmozdulás jelent.
- Longitudinális hullám: a mozgás párhuzamos a hullám terjedésével.
- Transzverzális hullám: a mozgás merőleges a hullám terjedési irányára.
- Szilárd testekben oszcillátorok lehetnek, itt transzverzális és longitudinális hullámok is haladhatnak és keletkezhetnek
- Terjedési sebesség: rugós példának megfelelően számolható.
- Vízben a felszínen lévő részecskék kb körmozgást végeznek; itt a gravitáció és a felületi feszültség adja a hullámzást
- Elég mély vízben felszíni hullámoknál a terjedési sebesség $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$, ahol λ a hullámhossz, g a nehézségi gyorsulás, ρ a sűrűség és α a felületi feszültség. Sekély vízben $c = \sqrt{gh}$.
- Gáznemű közegekben a kontinuitási egyenlet alapján szintén hullámok valósulhatnak meg.
- Ezek többnyire longitudinális hullámok: a hullámterjedés irányában oda-vissza mozgó részecskék hozzák létre a sűrűség-fluktuációkat
- Kis sűrűségfluktuációk esetén longitudinális hullám terjedési sebessége $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$
- Ez levegőben nulla Celsius fokon kb 330 m/s, hidegben lassabb, melegben gyorsabb.
- Hidrogéngázban az 1300 m/s értéket is elérheti, mivel az atomtömeggel fordítottan arányos.
- Egyatomos gázokban 1.1× nagyobb, mint hasonló kétatomos házban.
- Vízben 1500 m/s körül van, más folyadékokban 1000-2000 m/s között van.
- Szilárd anyagokban a keménység gyökével arányos, acélban 5-6000 m/s, gyémántban 12000 m/s, míg ólomban alig 1000 m/s fölötti.
- Szeizmikus hullámok: mechanikus hullámok szilárd és folyékony testben
- Törésnél a Föld különböző sűrűségű rétegei befolyásolják a terjedést
- Négyféle alaphullám: felületi és térfogati, longitudinális (P, azaz primary, ez a fenti sebességgel terjed) és transzverz (S, azaz secondary, mert ez felakkora sebességű)
- Távolság meghatározható a két hullám időkülönbségéből. Pontos idő és mélység (40-700 km) meghatározásához sok mérést használnak. Maradék: 0.1 s.

10.2. A hang fizikájának alapjai

- A rugalmas közegekben fellépő mechanikai rezgést hívjuk hangnak; 20-20000 Hz között a levegőn keresztül *halljuk*.
- A Fourier-tétel miatt sok rezgésnek esik ebbe a tartományba valamely komponense; tiszta hangnál is vannak felhangok.
- Hangok forrása testek saját rezgései a sajátfrekvenciákon, állóhullámok többnyire
- Erősítés: rezonancia a hangsugárzóval; ez befolyásolja a hangszínt. A hangsugárzó adja a hangszínt, pl. hangszer teste, szájüreg, stb.
- Hanghullám terjedése esetén részecskék kitérése, sebessége is hullámszerűen változik, de leggyakrabban a nyomás változását követjük.
- A kitérés pontról pontra és időről időre: $f(x,t) = f_0 \sin(kx + \omega t)$.
- Egy Δx vastagságú, A felületű rétegre a Newton-törvény alapján:

$$F = ma = \rho V a = \rho A \Delta x a \tag{96}$$

- Másrészt az erő a két oldali közötti nyomáskülönbségből származik, $F = A\Delta p$, innen:

$$A\Delta p = \rho A \Delta x a \tag{97}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \rho a \tag{98}$$

$$p' = \rho \ddot{f} \tag{99}$$

mivel a gyorsulás az elmozdulás idő szerinti második deriváltja.

- A nyomás végül $p = p_0 + \rho \omega c f_0 \cos(kx + \omega t)$, ahol p_0 a környezeti nyomás, ehhez képest fluktuál a hullámban a nyomás.
- A nyomáshullám amplitúdója tehát $p_A = \rho \omega c f_0$, ezt logaritmikusan érzékeljük:

$$d = 20 \log_{10} \left(\frac{p_A}{p_r} \right) \tag{100}$$

- Ezt hívjuk hangosságnak vagy hangnyomásszintnek [dB], itt a referencia-nyomás p_r a legkisebb érzékelhető nyomásamplitúdó. Általában 20 μPa levegőben.
- Tipikus decibel értékek: csönd 30 dB, városi zaj 60-70 dB, fájdalommal járó zaj 120 dB.
- Az intenzitás, az adott felületen időegység alatt átáramló energia, a nyomással négyzetesen arányos, tehát a dB érték ezzel kifejezve:

$$d = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \tag{101}$$

- A legkisebb érzékelhető energiasűrűség frekvenciafüggő, 1000 Hz frekvencián kb. $I_0 = 10^{-12} W/m^2$. Levegő esetén ebből $f_0 = 10^{-11} m$.
- A hangintenzitás a távolsággal négyzetesen csökken. Tipikus intenzitások: beszéd 10^{-5} W/m^{2}m, zongora 10^{-1} W/m^2, erős hangszóró 10^2 W/m^2.
- A *phon* esetén $I_0(f)$ frekvenciafüggő küszöbértéket használunk.

10.3. A hang forrásai

- A hangot valamely tárgy (húr, membrán, hangszál) rezgése adja. Ezt aztán valamilyen rezonátor-közeg felerősíti, a saját rezonancia-frekvenciájának megfelelően. Ez adja az adott eszköz vagy ember hangszínét.
- Legjobb a gömb alakú membrán lenne, de a sík membránok is jól adják át a hangot.
- Húrok rezgései: l hosszúságú húron $f_n = nc/2l$ frekvenciák lehetségesek állóhullámmal. Itt $c = \sqrt{F/A\rho}$, ahol F a feszítő erő, A a keresztmetszet és ρ a sűrűség. Az f_1 frekvencián felül az f_n felhangok is megjelennek, a sugárzó térfogat erősítésétől függően különböző arányban.
- Egyes hangok gyenge érintéssel megszüntethetőek - pl középen lévő érintésnél az alaphang.
- A húr igen rossz hangsugárzó egyébként, nagyon fontos hozzá az erősítés: a hangszer teste.
- Pálcák és membránok rezgései bonyolultabbak, több lehetőség van (Chladni ábrák)
- Sípok: levegőoszlop rezgései. Itt a közegbeli hangsebesség határozza meg a frekvenciákat.
- Hangszerek hangszínét a felhangok aránya határozza meg.

10.4. Hangsorok, konszonancia és disszonancia

- Hangok egyszerre hangzásánál a f_1/f_2 hangköz határozza meg a konszonanciát. abszolút konszonancia: 2:1 (oktáv), teljes konszonancia: 3:2 (kvint), 4:3 (kvart), egyéb: 5:4 (nagy terc) 6:5 (kis terc).
- Helmholtz szerint a lebegések miatt lesz két hang disszonáns, más magyarázatok is vannak (pl Stumpf: összeolvadási érzet).
- Konszonáns hármashangzat: ha minden hangköz konszonáns (1:5/4:3/2 vagy 1:6/5:3/2).
- Hangsorokban szomszédos hangok között 9/8 (nagy egész hang), 10/9 (kis egész hang) vagy 16/15 (nagy félhang). Hangsorok azonos hangjai közti különbség lehet 25/24 is, ez a kis félhang.
- Dúr hangsor, és közte a hangközök (nagyságuk sorban $eefeeef$):

1		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$		2
	$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	

- Moll hangsor (itt a hangközök sorban: $efeefee$):

1		$\frac{9}{8}$		$\frac{6}{5}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{8}{5}$		$\frac{9}{5}$		2
	$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$	

- A moll hangsor harmadik hangközétől indulva visszakapjuk a dúr sorrendet, apró eltéréssel (néhol kis egész hang helyett nagy egész hang van, és viszont).
- Legyen ugyanaz a hangsor (hangközök egymásutánja) másik hangról kiindulva is lejátszható! Csak azokat nevezzük új hangoknak, ahol legalább 25/24 a különbség lefelé és felfelé is ('isz' és 'esz'). Ez 21 hang.
- Ez a skála is túl bő. Egyszerűsítés: legyen 12 egyenlő hangköz, azaz a hangsor $1, \delta, \delta^2, \ldots$.
- Ekkor $2 = \delta^{12}$, azaz $\delta = 1.0595$. Ezt hívják jóltemperált skálának
- Jóltemperált skála: a kvint (g) $1{,}0595^5$=1,4983 3/2 helyett. Rögzített hangokkal bíró hangszerekben ezt a hangolást alkalmazzák. Húros hangszereknél persze lehet variálni.
- A hangoláshoz használt alaphang: 1939 óta 440 Hz (azelőtt 435 Hz volt). Eszerint az egyvonalas c, azaz c_1 261,63 Hz (9 hangközzel arrébb), fizikai hangolásban viszont 256 Hz.
- Szubkontra: kis c-nél 3 oktávval lejjebb. Ötvonalas c: 4096 Hz.
- Ultra- és infrahangok: nem hallhatóak, de sok alkalmazásuk van...