Bevezetés a fizikába

Csanád Máté

2012. június 1.

1. Bevezetés

1.1. Fizika a környezettudományban

A fizika minden természettudomány alapját képezi. A kémia, biológia, meteorológia, földtan folyamatainak jelentős részét megérthetjük fizikai alapfolyamatok segítségével. Álljon itt példaként néhány olyan jelenség, amely a fizika törvényeinek segítségével vizsgálható:

- A földkéreg dinamikája, hegységek kialakulása, vulkánok
- Légköri folyamatok, az időjárás alakulása, csapadék, szél, légszennyezettség
- A Föld energiaháztartása, napsugárzás, üvegházhatás
- Folyók és tengeráramlatok viselkedése
- Elektromágneses sugárzások, ezek hatása az emberre, elektromágneses zajszennyezés
- Nukleáris folyamatok, természetes radioaktivitás, sugárvédelem
- Az ember energiagazdálkodása, megújuló és nem megújuló energiaforrások
- A hang fizikája, zajvédelem
- Orvosi alkalmazások: CT, röntgen, PET, MRI

1.2. Matematikai háttér

A matematika a fizika nyelve. Ismerete alapvető a fizika megértéséhez. A következőkre feltétlenül szükség lesz.

- Alapvető műveletek, törtek rendezése
- Egyenletmegoldás
- Függvények
- Vektorok, összeadásuk, szorzásuk
- Koordináta-rendszerek
- Szögfüggvények
- Geometria
- Határértékek
- Differenciálás
- Integrálás

De a legfontosabb, hogy egy képlet mögött lássa az ember a jelentést. A fizika alapjait a törvények képezik, ezeket az *egyszerűség kedvéért* képletekkel írjuk le. Bármely törvényt azonban szavakkal kell tudni leírni elsősorban. Fontos látni, hogy egy törvényben sosem

- *az* idő,
- *a* hő, vagy
- *a* tömeg

szerepel, hanem konkrétan

- valamely adott út megtételéhez szükséges idő,
- valamely adott folyamathoz szükséges hő, vagy
- valamely adott test tömege

1.3. A fizika története dióhéjban

Egyiptom, Mezopotámia és a termékeny félhold A tudomány kezdete. Írás, számrendszer, eszközhasználat és az ég megfigyelése.

A görög-római kultúra Geometria, Föld-központú világkép, elektromosság, atom-hipotézis, a tudományos gondolkozás alapjainak lefektetése.

Közép- és újkor Gutenberg: önyvnyomtatás. Kepler és Galilei: a mai világkép kialakulása. Newton: a mai kinematika és a mechanika kialakulása. Coulomb, Galvani, Volta: az elektromosság alapjai. Guericke, Boyle, Carnot, Joule: a termodinamika alapjai.

A modern kor Curie: radioaktivitás, Planck: kvantumelmélet, Einstein: relativitás

Mai fizika Részecskefizika: gyorsítók, szuperszámítógépek. Asztrofizika: óriás-távcsövek, műholdak. Anyagfizika, biofizika, nanofizika …

1.4. A fizika egységei és mértékegységei

A mértékegységek definiálják az egyes mérhető mennyiségek (távolság, időtartam, hőmérséklet, tömeg) skáláját.

1.4.1. Alapegységek

- Három alapegység: kilogramm, méter, másodperc.
- Minden további mértékegység ebből származtatható: pl. Joule $[\mathrm{kg\,m^2/s^2}]$, Newton $[\mathrm{kg\,m/s^2}]$
- Sok mennyiséget állandókon keresztül új mértékegységgel látunk el: Kelvin/Celsius (Boltzmann-állandó nélkül Joule), Coulomb (elemi töltés nélkül darab)
- Fizikai állandók: fénysebesség, $c = 3\cdot 10^8$ m/s, kvantum-állandó: $\hbar = 10^{-34}$ Js, gravitációs állandó: $\gamma = 6,7\cdot 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$.
- A fenti állandókkal az összes mértékegység kifejezhető, például 1 kg $= 45942243,8\sqrt{\hbar c/\gamma}$, 1 m $= 6,187746055\cdot 10^{34}\sqrt{\gamma\hbar/c^3}$ és végül 1 s $= 1,8550396\cdot 10^{43}\sqrt{\gamma\hbar/c^5}$!

A mértékegységek használatának praktikus oldala, hogy bizonytalanság esetén segítenek egyszerű képletek ellenőrzésében. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy egy tárgy sebességének [m/s] kiszámításának képletében szerepel a tárgy által megtett távolság [m] és az ezalatt eltelt idő [s], más nem. Ekkor biztosak lehetünk benne, hogy a törvényben a megtett távolságot kell elosztanunk az ehhez szükséges eltelt idővel, hiszen csak így jöhet ki a kívánt méter/másodperc eredmény.

1.4.2. Prefixumok

yotta, Y 10^{24}
zetta, Z 10^{21}
exa, E 10^{18}
peta, P 10^{15}
tera, T 10^{12}
giga, G 10^{9}
mega, M 10^{6}
kilo, k 10^{3}
deka, dk/da 10^{1}
deci, d 10^{-1}
centi, c 10^{-2}
milli, m 10^{-3}
mikro, μ 10^{-6}
nano, n 10^{-9}
piko, p 10^{-12}
femto, f 10^{-15}
atto, a 10^{-18}
zepto, z 10^{-21}
yocto, y 10^{-24}

1.4.3. Vektor- és skalármennyiségek

- Sok fizikai mennyiségnek csak a nagyságáról beszélhetünk, ezeket *skalármennyiségnek* hívjuk: energia, tömeg, térfogat, megtett út
- Sok mennyiségnek viszont van iránya, ezeket *vektormennyiségnek* hívjuk: elmozdulás, sebesség, gyorsulás, erő, forgatónyomaték ...
- Ezeknek is sokszor csak a nagyságáról beszélünk, de fontos látni, hogy van irányuk is!
- Vannak mennyiségek, amelyeket legtöbbször skalárként használunk, de lehet vektorként is értelmezni őket, ilyen a felület, illetve a felületre merőleges iránynak vett verziója.
- Vannak még bonyolultabb matematikai objektumokkal (mátrixokkal) leírható mennyiségek, például a tehetetlenségi nyomaték, ezeket is általában skalárként kezeljük az egyszerűség kedvéért (pontosabban olyan példákat vizsgálunk, ahol skalárként kezelhetőek).

2. Kinematika

2.1. A mechanika és a kinematika modellje

- Anyagi átalakulás nélküli rendszerek (általában összetett)
- Jelen állapotból jövőre következtet
- Mozgást vagy deformációt ír le
- Kinematika: a mozgás leírása, az ok keresése nélkül
- Közelítés: pontszerű test (pl. billiárdgolyó, atom, részecske)
- Koordinátarendszerben: $\vec{r}$ vektor
- Alapvetően *nincs* koordinátarendszer, nekünk kell kitalálni.
- Vektor-algebra:

$$a+b=b+a \tag{1}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{2}$$

$$k\cdot(a+b)=k\cdot a+k\cdot b \tag{3}$$

$$a_x=|a|cos(\alpha) \tag{4}$$

$$a_y=|a|sin(\alpha) \tag{5}$$

$$|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \tag{6}$$

- Komponensek összeadódnak, számmal szorzódnak
- Két vektor *azonos*, ha minden komponensük azonos
- Vektorok kezdőpontja az origó, de sokszor nem oda rajzoljuk be őket
- Időbeli változás: $\vec{r}(t)$

2.2. A kinematika alapfogalmai

- Helyvektor: minden pont egy vektor (origó választása)
- Elmozdulás: $\Delta\vec{r}=\vec{r}'-\vec{r}$, amíg $t\to t'$. Sebesség ennek során:

$$\vec{v}_{t,t'}=\frac{\Delta\vec{r}}{t'-t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\left[\frac{m}{s}\right] \tag{7}$$

- Pillanatnyi sebesség: $\Delta t\to 0$:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}\text{, ez éppen az } r(t) \text{ függvény idő szerinti deriváltja!} \tag{8}$$

- Gyorsulás hasonlóan:

$$\vec{a}_{t,t'}=\frac{\Delta\vec{v}}{t'-t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{9}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\frac{d\frac{d\vec{r}}{dt}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}} \tag{10}$$

- A gyorsulás tehát a sebesség idő szerinti deriváltja, vagy a helyzet idő szerinti második deriváltja (az idő szerinti deriváltat ponttal jelöljük, azaz $v=\dot{r}$ és $a=\dot{v}=\ddot{r}$).
- Lehetne a hely több deriváltját vizsgálni, de nem szoktuk, így marad a fenti kettő.
- Mozgó megfigyelők vagy objektumok egymáshoz képesti sebessége egy harmadik megfigyelőhöz ill. objektumhoz képesti sebességük összege, azaz „a sebességek összeadódnak": 100 km/h sebességű autóból 10 km/h-val kidobott teniszlabda az út mellett álló megfigyelő szerint 110 km/h-val mozog.
- Álló megfigyelő, $\vec{v}_a$ és $\vec{v}_b$ sebességű mozgó járművek $\Rightarrow$ $\vec{v}_a-\vec{v}_b$ sebesség egymáshoz képest
- Álló megfigyelő, $\vec{v}_a$ sebességű mozgó jármű, $\vec{v}_b$ sebességű mozgó ember a járművön $\Rightarrow$ $\vec{v}_a+\vec{v}_b$ sebesség egymáshoz képest
- Példák: autó, vonat, bolygók és holdak, műhold és űrséta, hajó folyón, repülőn szél
- Általában $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ három komponensű vektor (3D világ)
- Egyenes vonalú vagy síkmozgás: alkalmas koordinátarendszerben kevesebb komponens

2.3. Egydimenziós mozgás 1D

- Koordinátarendszer x iránya a mozgás irányában $\Rightarrow$ csak egy komponens
- Egyenletes mozgás:
  - $v=v_0$ (állandó)
  - $r=r_0+v\cdot t$ (figyeljük meg a deriváltat)
- Egyenletesen gyorsuló mozgás:
  - $a=a_0$ (állandó)
  - $v=v_0+a\cdot t$ (figyeljük meg a deriváltat itt is)
  - Egy t szakaszon az átlagsebesség: $v_{0\to t}=v_0+\frac{a}{2}t$
  - Az új helyzet: $r(t)=r_0+v_0t+\frac{a}{2}t^2$
  - A megtett út: $s=v_0t+\frac{a}{2}t^2$
  - Példa: ugrás, trambulin, ejtés
  - Elhanyagoljuk: légellenállás
- Rezgőmozgás is egy dimenziós. Harmonikus rezgőmozgás fontos!
  - A hely: $r=A\cdot\sin(\omega t)$
  - A sebesség: $v=A\omega\cdot\cos(\omega t)$
  - A gyorsulás: $a=-A\omega^2\cdot\sin(\omega t)$
  - Periódusidő: $T=2\pi/\omega=1/f$. A frekvencia: f.
  - Rugó, kristályrács, stb.

$\Delta s=v\cdot\Delta t\to ds=v\cdot dt$

ha olyan rövid az idő, hogy a sebesség már állandó.

$\Sigma\Delta s=\int ds$

$s=\int v\cdot dt$

d = végtelen rövid hossz.

olyan pici időhosszak összege, ahol a v már nem változik.

Helyet vált → $v=\dot{r}$

a seb a helyet deriv.

$a=\dot{v}$

2.4. Kétdimenziós „hajítás" 2D

- A mozgás síkja az x, y sík. A két irány független $\Rightarrow$ két 1D mozgásból áll össze!
- Egyszerű eset: a=állandó (iránya is!). Példa: rakéta, darts, tenisz, tárgy eldobása
  - Kezdősebesség: $\vec{v}_0=(v_x,v_y)=(|\vec{v}_0|\cos\alpha,|\vec{v}_0|\sin\alpha)$ $v_x=v_0\cdot\cos\alpha$ $v_y=v_0\cdot\sin\alpha$
  - Ekkor x irányban egyenletes mozgás, y irányban egyenletes gyorsulás:

$$x=x_0+v_xt=x_0+|\vec{v}_0|\cos(\alpha)t \tag{11}$$

$$y=y_0+v_yt+\frac{a}{2}t^2=y_0+|\vec{v}_0|\sin(\alpha)t+\frac{a}{2}t^2 \tag{12}$$

$x=\frac{v_0^2\cdot\sin 2\alpha}{g}$ $t=\frac{v_0\cdot\sin\alpha}{g}$

  - Kiszámítandó: meddig repül? milyen messzire repül? mekkora sebességgel ér földet?
  - Órai kísérlet: repülési idő és távolságok mérése $\Rightarrow$ gyorsulás meghatározható!

2.5. Körmozgás

- Másik egyszerű eset a körmozgás, itt a pont pályája egy kör, $|\vec{r}|=R$ =állandó
- A szögsebesség az időegység alatti elfordulás: $\omega=d\alpha/dt$.
- Egyenletes körmozgás, ha ω = állandó, ekkor $|\vec{v}|$=állandó, de az iránya változik.
- Periódusidő: T (teljes kör megtételéhez szükséges idő), ω-val kifejezve $T=2\pi/\omega$, azaz $\omega=2\pi/T$.

- Egyenletes körmozgásnál a helyzethez tartozó szög: $\alpha = \omega t$.
- A hely (r) koordinátái:

$$r = (R\sin(\omega t), R\cos(\omega t)) \tag{13}$$

- Ebből deriválással megkaphatóak sebesség (v) és a gyorsulás (a) koordinátái:

$$v = (R\omega\cos(\omega t), -R\omega\sin(\omega t)) \tag{14}$$

$$a = (-R\omega^2\sin(\omega t), -R\omega^2\cos(\omega t)) = -\omega^2 r \tag{15}$$

- Könnyen belátható, hogy $\vec{r} \perp \vec{v}$ mindig.
- A helyvektor nagysága mindig R (hiszen ez a sugár)
- A sebesség nagysága $|v| = \omega R$, ez a kerületi sebesség. Iránya mindig merőleges a sugárra.
- A gyorsulás nagysága: $|a| = \omega^2|r| = \omega^2 R$
- A gyorsulás iránya: a középpont felé mutat (centripetális), hiszen a arányos r-rel, ahogy fent látható.
- Ezen mozgás x vagy y komponense éppen a harmonikus rezgés *vetülete*.
- Nem egyenletes körmozgás esetén lehet érintőirányú gyorsulás $a_\perp$: a kör érintőjének irányában.
- Szöggyorsulás: $\beta = d\omega/dt$, ez egyenletesen gyorsuló körmozgásnál: $|a_\perp| = R\beta$.
- Példa: inga.
- Igazából ω és β is vektorok, jobbkézszabály szerint a forgástengely irányába mutatnak.

3. Newton törvényei

2.

3.1. Newton élete

- 1642. december 5. – 1727. március 20.
- „Ha messzebbre láttam, mint mások, csak azért volt, mert óriások vállán álltam"
- Trinity College (Cambridge), matematikát tanul majd 1669-től professzor itt
- 1669: De Analysi per Aequationes Numeri Terminorum Infinitas (A végtelen sorok elemzéséről) és De methodis serierum et fluxionum (A sorok és fluxiók módszeréről); differenciálszámítás (fizikai alapokon)
- 1684-87: „Principia": Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (A természetfilozófia matematikai alapja). Későbbi kiadások: 1713. és 1726.
- Politikai pálya: sok ellenlábas

3.2. Newton törvényeinek háttere

- Newton fő műve, a Principia alapján
- Definíciók és axiómák, majd a testek mozgásának leírása (súrlódás és gravitáció is)
- Ezek 200 évig meghatározóak Newton után
- Fő kérdések: mozgás *okának* kutatása, koordinátarendszerek
- Inerciarendszer, erő és tömeg bevezetése
- Sokkal később: gravitációban érintett („gravitáló") tömeg és tehetetlen tömeg ekvivalenciája

3.3. Newton első törvénye

- Egy test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását, amíg valami annak megváltoztatására nem kényszeríti – azt a koordinátarendszert (avagy megfigyelőt), ahol ez tényleg mindig igaz, inerciarendszernek nevezzük
- Ha megfelelő koordinátarendszert választunk, akkor tehát a mozgásállapot megváltozása csak kölcsonhatás eredményeként következhet be.
- Ezek az inerciarendszerek, amelyek nem gyorsulnak (mihez képest persze).
- A Föld eleve forog és kering, a Naprendszer is a Tejútrendszer középpontja körül. Az ezekben felvett koordinátarendszerek nem inerciarendszerek! Gyakorlatilag elhanyagolható ez a hatás, jó közelítéssel igaz, hogy a Földön a magukra hagyott tárgyak nem mozdulnak meg maguktól hirtelen.

- Gyorsuló koordinátarendszerben viszont maguktól elmozdulhatnak tárgyak! Itt tehát nem érvényes Newton első törvénye, de a többi sem. Ilyen a gyorsuló lift, repülő, autó, vonat: a padlóra rakott bőrönd magától elgurul/felborul.

3.4. Newton második törvénye

- A testre ható erő arányos a test gyorsulásával, azaz

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ vagy ha több erő is van, akkor} \tag{16}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \tag{17}$$

- A tömeg m, a test tulajdonsága, amely a „gyorsíthatóságát befolyásolja" $\Rightarrow$ *tehetetlen* tömeg.
- Később látni fogjuk, valójában $F = \frac{d}{dt}(mv)$, ha a tömeg is változhat.
- Az erő F, ez hozza létre a gyorsulást. Mértékegysége a N, azaz Newton.
- Egyensúly feltétele: $\Sigma_i \vec{F}_i = 0$, ekkor $a = 0$.
- Vegyük észre, hogy ebből következik az első törvény.
- Ez a legfontosabb mechanikai törvény, mindig ebből indulunk ki.
- Nem inerciarendszerben magától megmozdulhat egy tárgy: gyorsulhat erő nélkül, mert itt nem érvényes ez a Newton-törvény sem. Hogy mégis használhassuk, bevezetünk képzeletbeli erőket, amelyeket figyelembe lehet venni a tényleges erőkön kívül.
- Ezen képzeletbeli erő a tehetetlenségi erő, a-val gyorsuló rendszerben a nagysága $-ma$.
- Az erő nélküli gyorsulás problémája miatt kell ezeket a tehetetlenségi erőket bevezetni.
- Ekkor más erő nem hat a testre, kívülről nézve nem is gyorsul. De belülről nézve gyorsul, mivel „kimozog" alóla a koordinátarendszer. A gyorsulása éppen a rendszer gyorsulásának az ellentéte, tehát $-a$. Ezt pedig csak egy $-ma$ erő okozhatja, ha érvényben akarjuk tartani a Newton-törvényt.
- Forgó koordinátarendszer a középpontja felé gyorsul (centripetális gyorsulás), ezzel ellentétes $m \cdot a$ tehetetlenségi erő: centrifugális erő! Földön nappal és éjszaka más (a forgás és a keringés erősíthetik vagy gyengíthetik egymást).

3.5. Newton harmadik törvénye

- Ha egy test erővel hat egy másikra, akkor a másik ugyanakkora, ellentétes irányú erővel hat az elsőre. Ez az ellenerő.
- Ezt is minduntalan kihasználjuk, rugók, kötelek, rögzítések esetében.
- Egy asztal ekkkora erővel nyomja a rajta lévő tárgyat (hogy az át ne szakítsa, át ne essen rajta), így tehát a tárgy is ugyanekkora erővel nyomja az asztalt. A padló nyomja felfelé a rajta álló embert, az ember pedig lefelé a padlót.
- Klasszikus példa: puska kilövi a golyót nagy erővel - de a golyó is visszalöki a puskát ugyanekkora erővel, az pedig a lövészt.

3.6. Newton törvényeinek egyszerű alkalmazásai

- $F = 0$: egyenes vonalú egyenletes mozgás, $a = 0$, ahogy korábban láttuk.
- F =állandó: egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás, a =állandó, korábban láttuk.
- Kétdimenziós mozgások, $\vec{F}$=állandó: pl hajítás, $\vec{a}$ =állandó. Ebből $F_x = 0$, csak y irányban van erő, amelyet a gravitáció okoz, ahogy később látjuk.
- Egyenletes körmozgás, F=állandó de az iránya nem, mindig a centrum felé mutat.
- Körmozgásnál, ahogy láttuk $|a| = \omega^2 R = |v|^2/R$, ez a *centripetális gyorsulás*. Ezt Newton törvényei alapján csak egy erő okozhatja, ez a *centripetális erő*:

$$F_{cp} = mR\omega^2 \tag{18}$$

- Mi fejt ki ilyen erőt: kötél (pörgetett tárgy esetén), gravitáció (műholdak, bolygók mozgása).
- Föld „körbehajtása" a fenti kettő kombinációja.
- Egyenletesen gyorsuló körmozgás, ha van tangenciális (azaz érintő) irányú erő is.

4. Gravitáció

3.

4.1. Megfigyelések

- A fizika alapélménye a csillagok mozgása, az „égi mechanika"
- Nap, Merkúr, Vénusz, Mars, Jupiter, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz, ~~Plútó~~
- Mars és Jupiter között rengeteg kisbolygó (>1600)
- Pálya: kissé lapult ellipszis, melynek két gyújtópontja van, az ellipszist azon pontok alkotják, amelyektől a két pont távolságának összege fix. Az ellipszisnek egy sugár helyett két nagytengelye van. Legyen ezek jele most a és b.
  - Ekcentricitás $\epsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$
  - Föld pályája: $\epsilon = 0.266$, $b/a = 147.1$ millió km $/152.6$ millió km $= 0.964$.
  - Plútó: : $\epsilon = 0.8$, $b/a = 4447$ millió km $/7380$ millió km $= 0.603$.
- Első „világképek", azaz modellek a Föld, a Nap, a bolygók és a csillagok törvényeiről
  - Ptolemaiosz (I-II. század): geocentrikus
  - Kopernikusz (XV-XVI. század): a Föld is egy a bolygók közül! Övé az első heliocentrikus világkép, „Az égi pályák körforgásairól"
  - Tycho Brahe (XVI. század): elfogadta a Nap körüli forgást, de a Földet mozdulatlan, abszolút középpontnak gondolta, másképp nem tudta elképzelni, hogyan lehet, hogy a tárgyak a Föld és nem a Nap felé esnek. Látszik: természetfilozófia van itt még javarészt, nem természettudomány. „Az éteri világ új jelenségeiről"
  - Kepler (XVI-XVII. század): Brahe segédje, kiváló matematikai érzékkel; „Új csillagászat" és „A világ harmóniája"; a bolygómozgás törvényei

4.2. A bolygók, a Nap és a Hold

Bolygó	Holdak száma	Pályasugár $[10^9$ m]	Év [földi év]	Átmérő $[10^9$ m]	Nap [földi nap]	Gravitáció [földi g]
Merkúr	0	57,9	0,24	4,878	58	0,37
Vénusz	0	108,2	0,62	12,104	243	0,88
Föld	1	149,6	1	12,756	1	1
Mars	2	227,9	1,88	6,794	1,0	0,38
Jupiter	16	778,3	11,9	142,984	0,4	2,64
Szaturnusz	18	1427	29,5	120,536	0,4	1,15
Uránusz	15	2870	84,0	51,118	0,7	0,93
Neptunusz	8	4497	165	50,530	0,7	1,22
Plútó	1	5913	249	2,290	6,3	0,06
Nap	-	-	-	1392,000	25	27,9
Hold	-	0,384	29,5	3,475	27,3	0,16

4.3. Kepler törvényei

- I. törvény: a bolygók ellipszispályán mozognak, egyik gyújtópontban a Nap
- II. törvény: Nap-bolygó sugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol, tehát $R^2\omega$ =állandó, avagy Rv=állandó (R, v és ω időben változik az ellipszispályán való haladás során, de a fenti kifejezés végig állandó). Később látjuk, ez (valójában a tömeggel szorozva, azaz mRv) éppen a perdületnek felel meg, tehát a törvény azt fejezi ki, hog a perdület állandó. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy az erő „centrális", azaz egy állandó középpont irányába hat.
- III. törvény: Keringési idő négyzete arányos a nagytengely köbével, azaz R^3/T^2 =állandó
- Ebből az erő levezethető! Körmozgás: $F = mR\omega^2 = 4\pi^2 mR/T^2$ (mivel $\omega = 2\pi/T$),
- III. törvény szerint $R^3/T^2 = C$ (állandó), tehát $R/T^2 = C/R^2$, azaz $F = 4\pi^2 mC/R^2$.
- A Napra viszont ugyanekkora erő hat, így az erő törvénye szükségszerűen $F = \gamma m_1 m_2/R^2$.

4.4. Newton gravitációs törvénye

- Minden test vonzó hatással van az összes többire, az erő nagysága:

$$F_{\text{grav}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{19}$$

- Az erő iránya r-rel párhuzamos (azaz a két tárgyat összekötő irányban hat), vonzó típusú.
- Az ebben szereplő tömeg megegyezik a tehetetlen tömeggel (általános relativitáselm. alapja)
- A gravitációs állandó: $\gamma = 6,67259 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$.
- A Földön viszont az a tapasztalat, hogy m tömegű tárgyra $F = mg$ erő hat, $g = 9,81$ m/s^2.
- A két törvény egyszerre érvényes, tehát $mg = \gamma m M_{\text{Föld}}/R^2_{\text{Föld}}$, mivel ekkor a tárgy a Föld gravitációs középpontjától $R_{\text{Föld}}$ távolságra van (mert ez éppen a geometriai középpont is)
- A Föld adataira a következő adódik:

$$g = \gamma M_{\text{Föld}}/R^2_{\text{Föld}} \tag{20}$$

- Ha $R_{\text{Föld}} = 6373$ km, akkor $M_{\text{Föld}} = 5,98 \times 10^{24}$ kg.
- Ebből Kepler törvényei levezethetőek:
  - Newton-törvény alapján $ma = m\ddot{r} = \gamma m M/r^2$, azaz $\ddot{r} = -\gamma M/r^2$
  - Ebből r^3/T^2 = állandó levezethető (III. törvény), mivel körmozgás esetén $r\omega^2 = \gamma M/r^2$, azaz $r^3\omega^2 = \gamma M$, azaz $r^3/T^2 = \gamma M/4\pi^2$).
  - A második törvény is levezethető, ennek alapfeltevése, hogy $v \times r$ =állandó.
  - A pálya alakja is meghatározható, lehet kör, ellipszis, parabola és hiperbola (bolygó vonzását elhagyó tárgy esetén)
- Gond: azonnali, közvetítő nélküli hatás, azaz azonnal terjedő információ, ami lehetetlen! Megoldás: általános relativitáselmélet.

5. Néhány egyéb erő

4.

5.1. Harmonikus oszcillátor

- Láttuk: $r = A \cdot \sin(\omega t)$ és $a = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t)$, azaz $a = -\omega^2 r$
- Az ennek megfelelő erő: $F = -m\omega^2 r$.
- Például: rugóerő $F = -Dr$, $\omega^2 = -D/m$.
- A kitéréssel arányos *negatív visszacsatolás*: $m\ddot{r} = -Dr$. Megoldása trigonometrikus függvény, mert ennek második deriváltja önmaga, egy negatív számmal szorozva.
- Pozitív visszacsatolás: $m\ddot{r} = +Dr$, az így működő rendszerek minden határon túl erősödnének. Az egyenlet megoldása egy exponenciális függvény.
- Természetben sokszor fordul elő negatív visszacsatolás, ezért harmonikus oszcillátor gyakori.
- Csillapított rezgés: egyre csökkenő amplitúdójú oszcilláció.
- Kényszerrezgés: rezgető erő hozza létre az oszcillációt.
- Ha a rezgetés frekvenciája közel van a rendszer „saját" frekvenciájához ⇒ „rezonanciakatasztrófa", ekkor a rezgés nagyon felerősödik.
- Példa: hinta megfelelő ütemmel való lengetése során fellépő kilengés, Takoma-híd katasztrófája

5.2. Csillapító erők, a súrlódás

- Csillapítás: $F \sim -v$, például légellenállás. Együttható α, azaz $F = -\alpha v$.
- Zuhanás során, ha a légellenállás megegyezik a gravitációs erővel: kiejtik egymást, egyenletes mozgás lesz. Ekkor $F = mg - \alpha v = 0$, a határsebesség $v = mg/\alpha$.
- Nagy sebességeknél $F \sim v^2$ is felléphet.
- Súrlódás állandó nagyságú, és mozgással ellentétes irányú. Nagysága függ a nyomóerőtől!
- Csúszási súrlódás arányos a nyomóerővel, arányossági tényező μ, a súrlódási együttható:

$$F_s = \mu F_N. \tag{21}$$

- Tapadási súrlódás *kényszererő*, maximális lehetséges értéke a nyomóerővel arányos, μ_0 a tapadási súrlódási együttható:

$$F_t < \mu_0 F_N \tag{22}$$

- Általában $\mu_0 > \mu$ (*megcsúszás lehetséges*), anyagra jellemző mindkettő
- Súrlódási erő ϕ meredekségű lejtőn
  - Első feladat: rajz, erők felírása.
  - Kulcs: az erők felbontása egy lejtővel párhuzamos ill. arra merőleges komponensre.
  - Lejtőre merőleges irányban nincs mozgás (miért?), párhuzamosan igen!
  - Nyomóerő: csak a lejtőre merőleges irányban hat. Súrlódás: csak a párhuzamosan hat.
  - Gravitáció mindkét irányban hat, két komponensre kell bontani:

$$F_{g,\text{merőleges}} = mg\cos\phi \tag{23}$$

$$F_{g,\text{párhuzamos}} = mg\sin\phi \tag{24}$$

  - Lejtő nyomóereje merőleges a lejtőre, mg egyik komponensével egyenlítik ki egymást (mivel ebben az irányban nincs gyorsulás). Azaz

$$F_{g,\text{merőleges}} + F_N = 0\ ,\ \text{azaz}\ F_N = mg\cos\phi \tag{25}$$

  - A súrlódási erő:

$$F_s = \mu F_N = \mu mg\cos\phi. \tag{26}$$

  - Gravitáció $mg\sin\phi$ komponense gyorsít, a súrlódási erő ellenében
  - Összes, a lejtővel párhuzamos erő, az irányokat is figyelembe véve:

$$F_s + F_{g,\text{párh.}} = \mu mg\cos\phi - mg\sin\phi \tag{27}$$

  - Egyenletes sebesség feltétele innen $\mu\cos\phi = \sin\phi$, azaz $\mu = \tan\phi$
- Néhány példa csúszási súrlódási együtthatóra: fa-fa: 0,5, acél-acél: 0,1, acél-jég: 0,01.
- Tapadási súrlódás (órai kísérletben mértük is): gumi-aszfalt: 0,8, vas-vas: 0,1
- Ez utóbbi „hajtja" a vonatot, az autót (ez használja fel a motor erejét előrehaladó mozgásra)

5.3. Látszólagos erők nem-inercia rendszerekben

- Nem inerciarendszerben magától megmozdulhat egy tárgy: gyorsulhat erő nélkül, mert itt nem érvényesek a Newton- törvények. Hogy mégis használhassuk ezeket, bevezetünk képzeletbeli erőket, amelyeket figyelembe lehet venni a tényleges erőkön kívül.
- Legyen egy gyorsuló rendszer, például egy fékező busz, és ebben egy bőrönd. A busz lefékez. Ekkor ez kívülről nézve háborítatlanul mozog tovább, egyenletes mozgással, mivel nem hat rá erő. De belülről nézve gyorsul, mivel „kimozog" alóla a koordinátarendszer. A gyorsulása éppen a rendszer gyorsulásának az ellentéte, tehát $-a$. Ezt pedig csak egy $-ma$ erő okozhatja, ha érvényben akarjuk tartani a Newton-törvényt.
- Ezen képzeletbeli erő a tehetetlenségi erő, a-val gyorsuló rendszerben a nagysága $-ma$.
- Az erő nélküli gyorsulás problémája miatt kell tehát a tehetetlenségi erőket bevezetni. Figyelembe kell venni a tényleges erőkön kívül (lásd még a Newton-törvényeknél).
- Súlytalanság: a gyorsulva zuhanás tehetetlenségi ereje és gravitációs erő kiejtik egymást
- Forgó rendszer a középpont felé gyorsul, $a = r\omega^2$. A fentiek értelmében egy ezzel ellentétes irányú tehetetlenségi erő jelenik meg!
- Ez a centrifugális erő: forgó koordinátarendszerben kifelé hat, minden testre. Nagysága:

$$F_{cf} = mr\omega^2. \tag{28}$$

- Példa: kanyarodó autó, körhinta stb.
- Ez préseli a ruhát a centrifuga széléhez. A Földön ez csökkenti a mérhető súlyunkat is.

5.4. A Coriolis-erő

- Coriolis-erő a forgó koordinátarendszerben mozgó testek esetében jelentkezik, látszólagos erő. Nézzünk példának egy pisztolygolyót!
- Kiindulási helyzetben a kerületi sebesség $v_\perp = r\omega$. Sugárirányú elmozdulás vt.
- Új helyzetben a talaj kerületi sebessége $(r + vt)\omega$, de a golyóé még mindig csak $r\omega$.
- Ezért lesz a kerületi irányú elmozdulás = sebességkülönbség×idő: $vt^2\omega$
- Ha $a_\perp$ gyorsulás volna, akkor $a_\perp t^2/2$ utat tennénk meg (mivel $s = at^2/2$)
- Innek $a_\perp = 2v\omega$. Iránnyal együtt

$$a_{\text{Coriolis}} = 2v \times \omega. \tag{29}$$

- Ezt a gyorsulást az okozza, hogy nem vagyunk inerciarendszerben. Magyarázzuk meg egy erővel:

$$F_{\text{Coriolis}} = 2mv \times \omega. \tag{30}$$

- Ez a Coriolis-erő: Foucault-inga, zuhanó tárgyak eltérülése, mozgó tárgyak súlyváltozása (Eötvös-hatás), szélrendszerek, tengeráramlatok
- Eltérülés L távolság megtételekor: $\omega L^2/v$. Szögsebesség hosszúsági foktól függ és a féltekétől.
- Budapesten 1 m/s sebesség esetén, 10 m megtételénél kb. 0,5 cm eltérülés.
- Légkörben 10 m/s és 100 km esetén 50 km eltérülés: nagy méretskálán ez a legnagyobb hatás
- A nyomáskülönbség irányába fújó szelet eltéríti a Coriolis-erő, és az izobár vonal mentén fog fújni. Körök alakulnak ki, levegőben 100 km, óceánban 1 km. Északon az óra járásával ellentétes, délen megegyező irányban. Lefolyók esetén *nem* ez a hatás érvényesül.
- Folyók a jobb partot mossák erősebben az északi féltekén.
- Szelek esetén a mérőszám a Rossby-szám: $Ro = \frac{v}{2\omega\sin(\phi)L}$, itt ϕ a földrajzi szélesség és L a méretskála. Kis Rossby szám esetén a Coriolis-erő hatása nagy. Tornádóban $Ro = 10^3$, alacsony nyomású cellákban 1 körüli vagy kisebb lehet.
- Az ilyen dimenzió nélküli számok gyakran hasznosak például áramlások leírása esetén, a különböző skálájú rendszerek hasonlóságát mutatják.

6. Munka, energia, teljesítmény

5.

6.1. Erő által végzett munka

- F erő hatására s elmozdulás esetén $W = Fs$ munkát végez az erő – ha az erő irányába történt az elmozdulás. A munka mértékegysége ennek megfelelően Nm, vagy másképpen Joule.
- Ha az erő és az elmozdulás nem párhuzamos, hanem α szöget zár be, akkor $W = Fs\cos(\alpha)$ a végzett munka, illetve vektorként tekintve az erőre és az elmozdulásra $W = \vec{F}\vec{s}$.
- A munka tehát az elmozdulás során ható erő és az erő irányába végzett elmozdulás szorzata.
- A felírt $W = Fs$ csak akkor alkalmazható, ha az s elmozdulás során F végig állandó. Egyéb esetben fel kell bontanunk a mozgást infinitezimálisan kicsi ds darabokra, és ezeket összeadni, azaz integrálni: $W = \int_0^s F(x)dx$.
- Legyen most F mégis állandó erőhatás, ennek hatására $a = F/m$ gyorsulás jön létre (Newton II.). A kezdősebesség legyen 0 m/s. Ekkor a végsebesség $v = at$ lesz t idő alatt.
- Az elmozdulás $s = at^2/2$, azaz $s = vt/2$. Az erő $F = ma = mv/t$. Innen a munkára $W = Fs$ azaz $W = mv/t \times vt/2$.
- Végeredmény: $W = \frac{1}{2}mv^2$, tehát ennyi munkát végzünk, ha egy testet v sebességre gyorsítunk.

6.2. Kinetikus és potenciális energia

- A fentiek alapján definiáljuk a ***mozgási energia*** mennyiségét: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. Ezzel $W = \Delta E_{\text{kin}}$, a kinetikus energia megváltozása, ha gyorsítunk egy tárgyat. Ez az erők eredőjére igaz, tehát közegellenállás, súrlódás esetén a nem a teljes húzóerő növeli a mozgási energiát.
- A fenti Δ azt jelképezi, hogy ha volt kezdeti sebesség is, akkor a munka a végálllapotbeli és a kezdeti mozgási energia különbségével egyezik meg. $W = E_{\text{kin},1} - E_{\text{kin},2}$

- Ha gravitációs erő hatására zuhan egy test, akkor a rá ható erő $F = mg$, állandó. Az erő irányú elmozdulás éppen a zuhanás során leküzdött magassággal, h-val azonos: $W = Fs = mgh$. Így bevezetjük a *helyzeti* vagy *potenciális energiát*: $E_{pot} = mgh$. Ekkor $W = \Delta E_{pot}$.
- Rugó esetén $F = -Dx$, azaz itt az erő nem konstans, tehát $W = \int F(x)dx = -\int Dxdx = -Dx^2/2$, némileg leegyszerűsítve a levezetést.
- Rugó potenciális energiája tehát x megnyúlás esetén: $E_{pot} = Dx^2/2$.

6.3. Konzervatív erők

- Ahogy az imént gravitációs erő vagy a rugóerő által végzett munka nem függ az útvonaltól (csak a kezdeti és a végállapottól), azaz ugyanannyi munkát végzünk, akárhogy is emeljük fel a tárgyat h magasságba.
- Az ilyen erőt *konzervatív erőnek* nevezzük. Súrlódás fellépése esetén ez nem igaz, hiszen a súrlódási erő a megtett útvonaltól függ, nem csak a kezdeti és a végállapotbeli helyzettől: minél hosszabb úton jutunk el ugyanoda, annál nagyobb munkát fordítunk a súrlódás legyőzésére.
- Konzervatív erőknél van értelme potenciális energiáról beszélni, azaz amikor a végzett munka nem függ az útvonaltól.
- Általánosságban, konzervatív erők munkája a helyzeti és a mozgási energiát módosítja:

$$W = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} \tag{31}$$

6.4. Az energia megmaradása

- Zárt rendszerben, amelybe nem avatkozunk be, amelyen nem végzünk munkát, a fentiek szerint $\Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$, mivel $W = 0$. Másképpen $\Delta(E_{kin} + E_{pot}) = 0$.
- Ebből a $E_{kin} + E_{pot}$ = állandó megmaradási törvény következik. Ez zárt rendszerre igaz, méghozzá csak akkor, ha nincsenek nem-konzervatív erők a rendszeren belül (súrl., légell.).
- Egyéb energiaformák: termikus (hő), elektromos, mágneses, kémiai, magfizikai, tömeg stb.
- Legáltalánosabb törvény: az *összes* energia összege állandó. Tömeggé is átalakulhat, de *nem veszik el* és *nem keletkezik* – zárt rendszerben, hiszen nem vesz ki / rak be senki energiát!
- Az energia általános definíciója: a munkavégzésre való képesség. Ha megtörténik a munkavégzés, akkor ez valamely más objektum energiáját növeli.
- Energiával számolni praktikus: h magasságból légellenállás nélkül zuhanó test energiája kezdetben mgh, a végén $mv^2/2$, innen a végsebessége $\sqrt{2gh}$.

6.5. Egyszerű gépek

- Ugyanazt a munkát „hosszabb úton" végezzük, azaz kisebb erővel (mivel $F \cdot s$ állandó).
- Példa: szerpentin (lejtő), autóemelő, stb.
- Emelő: $F = \frac{d_1}{d_2}G$
- Hengerkerék: $F = \frac{r_1}{r_2}G$
- Csiga: $F = G$ (álló csiga esetén, itt csak az irány változik), $F = G/2$ mozgó csiga esetén.
- Lejtő: $F = G\sin\alpha$
- Csavar: $F = \frac{h}{2\pi r}G$ (h a csavar menetemelkedése - „feltekert lejtő")
- Ék: $F = G\sin\alpha$.

6.6. Teljesítmény

- A munkavégzés sebessége a teljesítmény:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}, \text{ másképpen } P = \dot{W}. \tag{32}$$

- Mértékegysége J/s vagy Watt. Így 1 J = 1 Ws, a kWh tehát energia-mértékegység: 1 kWh = 3600 kJ, mivel 1 h = 3600 s, 1 kW = 1000 W. Teljesítmény-mértékegység a lóerő is, 1 LE = 735,5 W (75 kg egy másodperc alatt egy méterre emeléséhez szükséges teljesítmény).
- Állandó F erő és v sebesség esetén $P = W/t = Fs/t = Fv$.

- Az emberiség által felhasznált teljesítmény átlagosan kb. 500 EJ/év (1 EJ= 10^{18} J), avagy 14 TW, másképp fejenként kb. 2 kW. Ennyit kell erőművekkel előteremteni.

6.7. Lendület

- Newton II. alapján $F = ma$, azaz $F = m\dot{v}$. Ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}. \tag{33}$$

- Bevezetve a lendületet avagy impulzust (mértékegysége kgm/s):

$$I = mv, \text{ tehát } F = \frac{\Delta I}{\Delta t}, \text{ innen } \Delta I = F\Delta t. \tag{34}$$

- Két tárgy ütközése során F illetve $-F$ erővel hatnak egymásra (Newton III.)
- Ha külső erők nincsenek, akkor az impulzusok megváltozása: $\Delta I_1 = F\Delta t$ és $\Delta I_2 = -F\Delta t$.
- Végül $\Delta I_1 + \Delta I_2 = \Delta(I_1 + I_2) = 0$. Azaz az összimpulzus változatlan, $I_1 + I_2$ = áll.
- A kinetikus és a potenciális energia összege nem mindig marad meg, de az impulzus igen (zárt rendszerben, ahol nem hatnak külső erők – nincs, ami megváltoztassa az impulzust)!
- Visszapattanó labda által átadott impulzus $\Delta I = 2mv$ (mivel mv lendületből $-mv$ lesz). Erőhatás az impulzusátadás sebességétől függ, mivel $F = \Delta I/\Delta t$.

7. Pontrendszerek mechanikája

6.

7.1. Pontrendszerekben ható erők, szabadsági fokok

- Tömegpontok bármely halmazát egy rendszernek vehetjük. Ekkor hatnak *köztük belső* és *külső erők*. A belső erők összege mindig 0, hiszen mindkét fél a rendszer része, így az ellenerő is belső erő, és kiejti az erőt az összegzés során.
- Naprendszer: Nap és bolygók közti gravitáció belső, a Tejútrendszer gravitációja külső erő.
- Ütköző billiárdgolyók: az asztal által kifejtett súrlódás külső, az ütközéskor ható erő belső erő. A súrlódást elhanyagolva a két billiárdgolyó zárt rendszernek tekinthető, ahol I = áll.
- Rakéta és üzemanyaga: a kifelé áramló hajtóanyag ereje belső, a légellenállás külső erő.
- Szabad rendszerben minden részecske mozoghat kényszer nélkül, csak ütközés van (például egy nemesgáz atomjainak rendszerében). Itt minden részecskének 3 „szabadsági foka" van, a tér 3 irányában mozoghat szabadon.
- Kötött rendszerben kényszerek lépnek fel (például egy szilárd testben), ezáltal csökken a szabadsági fokok száma. Kétatomos molekula három dimenzióban: 2×3 szabadsági fok, eggyel csökken a kötés miatt, azaz végül 5. Ennyi adattal írható le a rendszer. Három pontból álló, kötött rendszer: 3×3, mínusz a 3 kötés ⇒ 6 szabadsági fok. Még több pont: marad a 6 (pl. 4×3 mínusz 6 kötés = 6). A sok pontból álló kötött (merev) rendszereknek tehát hat szabadsági foka van.

7.2. Tömegpontok egyszerű rendszerei

- Golyók ütközése, külső és belső erők lehetségesek. Az összimpulzust külső erők módosíthatják.
- Példa: billiárdgolyók ütközése (gravitáció és az asztal nyomóereje kiejti egymást, súrlódást elhanyagoljuk), magfúzió ($^3H+^2H \to {}^4He+n+3$ pJ energia), radioaktivitás ($n \to p+e^-+\bar{\nu}$)
- Az összimpulzus állandó bármely ütközésben, de az összes mozgási energia nem! A belső erők végezhetnek munkát, ekkor a mozgási energia változhat.
- Rugalmas ütközés: a mozgási energia megmarad. Példa: v_1 sebességű és álló golyó ütközése:

$$m_1v_1 + 0 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{36}$$

- Innen $m_2v_2' = m_1(v_1 - v_1')$ és $m_2v_2'^2 = m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')$. A a két egyenletet elosztva egymással $v_2' = v_1 + v_1'$, ezt visszahelyettesítve $m_2(v_1 + v_1') = m_1(v_1 - v_1')$, innen

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \tag{37}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \tag{38}$$

- Azonos tömegek esetén, azaz ha $m_1 = m_2 = m$, az első golyó megáll, a második pedig az első kezdeti sebességével megy tovább (lásd az órai kísérletet azonos tömegű guruló asztalokkal):

$$v_1' = 0 \text{ és } v_2' = v_1 \tag{39}$$

- Ha $m_2 \gg m_1$ (azaz például a földön lepattintott labda esetében, ahol az ütköző tárgy a Föld)

$$v_1' = -v_1 \text{ és } v_2' = 0 \tag{40}$$

- Rugalmatlan ütközés esetén az impulzus ugyan ugyanúgy megmarad, de az energia nem.
- *Tökéletesen* rugalmatlan ütközés esetén $v_1' = v_2'$, azaz a két test összetapad. Ekkor

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}, \tag{41}$$

csak az impulzusmegmaradásból.

- Mindkét esetben azt írtuk fel, hogy $m_1v_1 + m_2v_2 =$ állandó, azaz ugyanannyi minden pillanatban (az ütközés előtt és után is). Ezt úgy is írhatjuk, hogy $m_1\dot{r}_1 + m_2\dot{r}_2 =$ állandó, azaz:

$$m_1\frac{\Delta r_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta r_1}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1r_1 + m_2r_2)}{\Delta t} = \text{állandó.} \tag{42}$$

- Ez tehát azt jelenti, hogy ha bevezetjük az $r_{\text{tkp}} = (m_1r_1 + m_2r_2)/(m_1 + m_2)$ tömegközéppontot:

$$\frac{\Delta r_{\text{tkp}}}{\Delta t} = v_{\text{tkp}} \text{ állandó.} \tag{43}$$

- Ez a rendszer *tömegközéppontja*, amely háborítatlanul mozog, egyenletes mozgást végez, mivel nem hat a rendszerre erő. Egy mozgó labda esetében is ez van, benne az atomok és molekulák mozgásban vannak, de a tömegközéppont úgy mozog, mint ha a labda egy pont lenne.
- Ezért kezelhetjük a sok pontból álló rendszereket is egy tömegpontként!
- Rakétameghajtás esetén a Δm tömegű, v_h sebességgal kiáramló hajtóanyag által átadott impulzus $\Delta m v_h$ a rakéta tömegközéppontjából nézve. Így a rakéta impulzusára $m\Delta v = \Delta m v_h$. Itt infinitezimális időtartamokra a deriválás jelenik meg:

$$\frac{\Delta v}{\Delta m} = \frac{dv}{dm} = \frac{v_h}{m} \tag{44}$$

Ez egy differenciálegyenlet, amelynek megoldása a $v = v_h \ln(m/m_0)$, ha m_0 a rakéta kezdeti tömege. Így a végsebesség a rakéta és a hajtóanyag tömegének arányától függ:

$$v = v_h \ln\left(1 + \frac{m_{\text{üzemanyag}}}{m_0}\right) \tag{45}$$

7.3. Merev testek egyensúlya, a forgatónyomaték

- A több pontból álló merev rendszereknek (azaz a *merev testeknek*) hat szabadsági foka van (ld. fent): ennyi független mozgást tudnak végezni. Ebből három a tér három irányába való mozgás, a többi három pedig a tér három irányába mutató tengely körüli forgás.
- Két alapvető mozgás típus van tehát: adott irányba való haladás, adott tengely körül való forgás. Ezek kombinációjából minden mozgás felépíthető. A haladó mozgást Newton II. törvénye írja le (egyensúly: ha az összes erő összege nulla). Hogyan írhatjuk le a forgást?

- Több erő hatására mikor marad nyugalomban egy test, pl. egy mérleghinta? F_1 az egyik végén ható erő, F_2 a másik végén (a két hintázó súlya miatt fellépő erők). Az alátámasztás kiegyenlíti ezeket, és F_1 és F_2 r_1 és r_2 távolságra hatnak ettől az alátámasztástól. A rendszer nem mozdul el lefelé vagy felfelé, de elforoghat!
- Mi a feltétele annak, hogy ne következzen be forgás? Egyszerűen (segéderőket bevezetve) bizonyítható, hogy ez az $r_1F_1 + r_2F_2 = 0$ feltétel esetén teljesül.
- Ezért bevezetjük az egy adott tegnelyre vonatkoztatott forgatónyomatékot (mértékegysége Nm): $M = rF$.
- Vektormennyiség, iránya a forgástengely iránya, és $\vec{r}$ az erőt és a tengelyt összekötő vektor:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{46}$$

- Itt tehát vektorszorzást kell használni. A forgatónyomaték nagysága, ha r és F szöge α:

$$|M| = rF \sin\alpha \tag{47}$$

- Itt $r\sin\alpha$ az erő hatásvonalának távolsága az adott tengelytől (2D-s rajz esetén a tengely általában egy pont, és az iránya általában a rajzra merőleges – forgás a rajz síkjában)
- A forgatónyomaték a tengelyt metsző hatásvonalú erő esetén nulla.
- A forgatónyomaték nagysága tehát az erő merőleges komponense szorozva az erőkarral. Irány: jobbkézszabály szerint.
- Az egyensúly feltétele: $\Sigma M = 0$, az összes forgatónyomaték összege 0 (tetszőleges tengelyre).
- A mérleghinta esetében ebből jön ki az $r_1F_1 + r_2F_2 = 0$ feltétel, mivel az alátámasztás forgatónyomatéka 0.
- A forgatónyomaték által végzett munka körmozgás esetén (ahol a középponttól r távolságban α elfordulás történik, azaz az elmozdulás $s = r\alpha$): $W = Fs = Fr\alpha = M\alpha$
- A teljesítmény innen $P = M\omega$, mivel $\omega = \Delta\alpha/\Delta t$).

7.4. A súlypont, egyensúlyi helyzetek

- Pontrendszer esetén a gravitáció a test minden pontjára hat, az erő és a forgatónyomaték összege számítandó az összes pontra.
- Kiterjedt test esetén a gravitáció összesített forgatónyomatékának meghatározása bonyolult. Létezik azonban egy pont, amelyre vonatkoztatva a gravitációs erő forgatónyomatéka éppen nulla lesz. Ha ez alatt támasztjuk alá, egyensúlyban marad, mivel ekkor a mindkét erő (alátámasztás és gravitáció) forgatónyomatéka nulla. Ez a súlypont.
- A gravitációs erő tehát a súlypontban ható erőként képzelhető el!
- Két pont esetén $\vec{r} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$, sok pont esetén $\vec{r} = \Sigma m\vec{r}/\Sigma m$. Ez éppen a tömegközépponttal egyezik meg, amit az impulzusnál vezettünk be!
- Ez homogén testek esetén tulajdonképpen a geometriai középpont. Gravitációs erő munkája a súlypont magasságváltozásától függ!
- Gravitációs és nyomóerők rendszerében az egyensúly stabil, ha kis elmozdulás esetén a súlypont felfelé mozdulna el (energiabefektetésre van szükség a kimozdításhoz).
- Instabil egyensúly: kis elmozdulásra a súlypont lefelé mozdul el, azaz energia szabadul fel.
- Közömbös egyensúly: a kettő között, azaz a súlypont magassága nem változik.

7.5. Merev testek forgása

- Adott tengely körüli forgás esetén a szögsebesség iránya a forgástengely iránya. Adott pont sebessége, ahogy már a körmozgásnál láttuk:

$$v = r \times \omega. \tag{48}$$

- A teljes mozgási energia

$$E_{\text{kin}} = \Sigma\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2 = \frac{1}{2}\Theta\omega^2. \tag{49}$$

- Itt bevezettük a tehetetlenségi nyomatékot: $\Theta = \Sigma mr^2$. Függ a forgástengelytől!